المملكة المغربية

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
École Hassania des Travaux Publics

CONCOURS NATIONAL COMMUN

d'admission aux Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Session 2013

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Filière **PSI**

Durée **4** heures

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours PSI, comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\textit{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Quelques aspects de la transformée de Laplace

Notations et rappels

Dans ce problème $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^p$ de I dans $\mathbb{K}$, $p \geqslant 1$.

Si $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{K})$, on rappelle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ est dite convergente lorsque la fonction $x \longmapsto \int_0^x \varphi(t)\,dt$ possède une limite dans $\mathbb{K}$ lorsque x tend vers $+\infty$; on note alors $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ la valeur de cette limite.

On rappelle aussi que $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ peut converger sans que la fonction φ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Toutefois, pour les fonctions positives, il y a équivalence entre l'intégrabilité de la fonction sur un intervalle et la convergence de son intégrale sur cet intervalle.

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$; pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt} f(t)\,dt$ converge, on note $L(f)(z)$ la valeur de cette intégrale. La fonction $L(f)$ ainsi définie est appelée *la transformée de Laplace* de f.

Pour mener à bien cette épreuve, les candidats sont invités à manipuler les inégalités avec la plus grande vigilance surtout quand les objets concernés sont des nombres complexes.

1ère Partie
Résultats préliminaires

1.1. Soit $z \in \mathbb{C}$; on note x sa partie réelle et y sa partie imaginaire : $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

1.1.1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z) > 0$.

1.1.2. Montrer que si γ est un réel non nul, alors la fonction $t \longmapsto \cos(\gamma t)$ n'admet pas de limite en $+\infty$. En déduire que la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-iyt}$ possède une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque t tend vers $+\infty$ si, et seulement si, $y = 0$.

1.1.3. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}\,dt$ converge si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z) > 0$.

1.2. Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-z_0 t} f(t)\,dt$ soit convergente, et soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0)$; on désigne par F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-z_0 t} f(t)\,dt,\ x \geqslant 0.$$

1.2.1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1.2.2. Montrer que la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-(z-z_0)t}\,F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1.2.3. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}\,f(t)\,dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}\,f(t)\,dt = (z-z_0)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(z-z_0)t}\,F(t)\,dt.$$

1.3. Ici $f_\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ désigne la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Préciser le domaine de définition de $L(f_\lambda)$ et donner l'expression de $L(f_\lambda)(z)$ lorsque cette quantité est définie.

1.4. Abscisse de convergence

1.4.1. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$, il existe un unique $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ tel que $L(f)(z)$ soit défini si $\mathrm{Re}(z) > \sigma$ et ne le soit pas si $\mathrm{Re}(z) < \sigma$. Si le domaine de définition de $L(f)$ n'est pas vide, on pourra considérer la borne inférieure dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ de $\{\mathrm{Re}(z);\ L(f)(z) \textit{existe}\}$. σ est appelé l'abscisse de convergence de $L(f)$ et est noté $\sigma(f)$.

1.4.2. Préciser l'abscisse de convergence de $L(f_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

2ème Partie
Propriétés de la transformée de Laplace

Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ est une fonction telle que $\sigma(f) < +\infty$, alors d'après ce qui précède, la transformée de Laplace $L(f)$ est définie sur le demi plan ouvert $\Pi(\sigma(f)) = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > \sigma(f)\}$ du plan complexe, donc aussi sur l'intervalle ouvert $]\sigma(f),+\infty[$.

Dans la suite du problème, on note aussi $L(f)$ la restriction à l'intervalle $]\sigma(f),+\infty[$ de la transformée de Laplace de f.

Dans les questions qui suivent, on pourra utiliser avec profit le résultat de la question 1.2.3. ci-dessus et exploiter au mieux les propriétés de la fonction F définie en 1.2.

2.1. Propriétés fondamentales

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ une fonction telle que $\sigma(f) < +\infty$.

2.1.1. Montrer que l'application $L(f)$ est continue sur le demi plan $\Pi(\sigma(f))$. On pourra exploiter le fait que la fonction F, définie en 1.2., est bornée et utiliser la question 1.2.3.

2.1.2. Montrer que la restriction à l'intervalle $]\sigma(f),+\infty[$ de la transformée de Laplace de f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]\sigma(f),+\infty[$ et donner une expression intégrale de sa dérivée seconde notée $L(f)''$.

2.1.3. Montrer que l'application $x \longmapsto L(f)(x)$, définie sur l'intervalle $]\sigma(f),+\infty[$, admet une limite nulle en $+\infty$. On pourra exploiter la continuité en 0 de la fonction bornée F.

2.2. Exemple

Soit ω la fonction définie par : $w(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$, $t > 0$; on la prolonge par continuité en 0.

2.2.1. Préciser la valeur en 0 de la fonction et montrer que $\sigma(\omega) \leqslant 0$.

2.2.2. Pour tout $x > 0$, calculer la dérivée seconde de l'application $x \longmapsto L(\omega)(x)$ définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2.2.3. En déduire, pour tout $x > 0$, l'expression de $(L(\omega))'(x)$ puis celle de $L(\omega)(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. On pourra utiliser la question 2.1.3. pour calculer les constantes d'intégration.

2.3. Un théorème de Césaro

Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ une fonction à valeurs positives telle que $\sigma(g) \leqslant 0$; on suppose de plus que la fonction $x \longmapsto xL(g)(x)$ admet 1 comme limite en 0^+.

2.3.1. Montrer que, pour tout $x > 0$ et toute fonction h continue par morceaux sur [0,1] et à valeurs réelles, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-xt}\, g(t)h(\mathrm{e}^{-xt})$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On pose alors

$$\Delta_x(h) = x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\, g(t)h(\mathrm{e}^{-xt})\, dt.$$

2.3.2. Si P est un polynôme à coefficients réel, on désigne également par P la restriction au segment [0,1] de la fonction polynomiale associée. Montrer que $\Delta_x(P)$ tend vers $\int_0^1 P(t)\, dt$ lorsque x tend vers 0^+. On pourra exploiter la linéarité de Δ_x.

2.3.3. En donnant un énoncé précis du théorème utilisé, établir que la propriété précédente s'étend aux fonctions continues sur [0,1] et à valeurs réelles.

2.3.4. On admet ici que le résultat de la question précédente s'étend aux fonctions continues par morceaux sur [0,1] et à valeurs réelles, et on considère la fonction h_1 définie sur [0,1] par :

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \dfrac{1}{\mathrm{e}}, \\ \dfrac{1}{t} & \text{si} \quad \dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour $x > 0$, exprimer l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{x}} g(t)\, dt$ en fonction de x et de $\Delta_x(h_1)$ puis en déduire que la fonction $a \longmapsto \frac{1}{a}\int_0^a g(t)\, dt$, définie sur $]0, +\infty[$, tend vers 1 lorsque a tend vers $+\infty$.

3$^{\text{ème}}$ Partie
Comportement au voisinage de l'origine

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$; on s'intéresse dans cette partie à l'étude du comportement au voisinage de 0^+ de la transformée de Laplace $L(f)$ en rapport avec l'existence de $L(f)(0)$.

3.1. Dans cette question on suppose que $L(f)(0)$ existe, ce qui est équivaut à la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$; on en déduit que $\sigma(f) \leqslant 0$.

3.1.1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $L(f)(x) - L(f)(0) = x\int_0^{+\infty}(F(t) - L(f)(0))\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt$, où F désigne la primitive de f qui s'annule en 0.

3.1.2. En déduire que $L(f)(x)$ admet $L(f)(0)$ comme limite lorsque x tend vers 0^+. On pourra exploiter le fait que $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = L(f)(0)$ puis découper l'intégrale précédente en deux.

3.2. Montrer que la transformée de Laplace de la fonction cosinus et préciser sa limite en 0^+ sans être définie en 0.

Le but de la suite du problème est d'étudier des conditions suffisantes d'existence de $L(f)(0)$ lorsque la fonction $L(f)$ possède une limite dans $\mathbb{C}$ en 0^+ (théorème de Tauber).

3.3. Théorème de Tauber

Dans cette question, on suppose que la fonction $t \longmapsto tf(t)$ tend vers 0 en $+\infty$.

3.3.1. Justifier que $\sigma(f) \leqslant 0$.

3.3.2. Montrer que la fonction $a \longmapsto \frac{1}{a}\int_0^a |tf(t)|\,dt$, définie sur $]0,+\infty[$, tend vers 0 en $+\infty$.

3.3.3. Montrer que, pour tout réel u, $1 - \mathrm{e}^{-u} \leqslant u$.

3.3.4. Montrer que, pour tout x et a réels strictement positifs, on a

$$\left|L(f)(x) - \int_0^a f(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^a (1 - \mathrm{e}^{-xt})|f(t)|\,dt + \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,|f(t)|\,dt,$$

puis en déduire que

$$\left|L(f)(x) - \int_0^a f(t)\,dt\right| \leqslant x\int_0^a |tf(t)|\,dt + \frac{1}{ax}\sup_{t\geq a}|tf(t)|.$$

3.3.5. On suppose de plus que la fonction $L(f)$ possède une limite $\mu \in \mathbb{C}$ en 0^+. En choisissant convenablement x en fonction de a, déduire de ce qui précède que $L(f)(0)$ existe et vaut μ.

Fin de l'épreuve